UNA LECCIÓN DE ARITMÉTICA

Teorema Fundamental de la Aritmética y criterios de divisibilidad

Autor:

Carlos Prieto de Castro

Instituto de Matemáticas

Universidad Autónoma de México

ENCUENTRO CON LOS NÚMEROS

Envigado, Ciudad de las Matemáticas

Septiembre 26 y 27 de 2014

Lección 1

UNA LECCIÓN DE ARITMÉTICA

(Teorema Fundamental de la Aritmética y criterios de divisibilidad)

Contenido

Introducción

La lección que daremos, la profesora Clara Elena Mejía y yo, en este Encuentro con los Números en Envigado, está tomada de la primera unidad del libro **Aritmética y Geometría, grados 6 y 7,** que actualmente estoy escribiendo por encargo de la Sociedad Colombiana de Matemáticas para el proyecto de la Gobernación de Antioquia **"Antioquia la más educada".**

En ésta hablaremos un poco del teorema fundamental de la Aritmética y trabajaremos los numerales 1.4 y 1.5 concentrándonos en la explicación de por qué sirven los criterios de divisibilidad.

El libro **Aritmética y Geometría, grados 6 y 7** está diseñado para presentar y ejercitar los conocimientos de matemáticas correspondientes a los grados 6 y 7 de secundaria. En dicho texto busco llevar al alumno, junto con su maestro, a través de los métodos y las razones sobre las cuales se fundamentan los conceptos presentados. Por esta razón, cuando se me invitó a dar una lección de Aritmética, pensé que el tema de divisibilidad era un tema apropiado. Recurrentemente he visto que estos criterios se aplican automáticamente, pero cuando le pregunto a los alumnos por qué sirven, son muy pocos los que conocen la respuesta.

Las matemáticas son un desafío para el intelecto; cada concepto, cada problema, cada ejercicio representa un motivo para un juego del pensamiento. Todo hecho se debe presentar con una explicación completa y detallada de por qué se cumple. Considero que alumnos y profesores merecen explicaciones completas; en ningún momento les subestimo en sus posibilidades de incursionar en el maravilloso universo de los conceptos matemáticos.

El autor

1.1 Números naturales

Un proceso natural en el ser humano es el de **contar**. Este proceso constituye una de las necesidades primordiales del hombre.

Consideremos la siguiente pregunta: Supongamos que nos dan una bolsa llena de pelotas y nos preguntan: ¿Cuántas pelotas hay en la bolsa?

La manera natural de responder a esta pregunta es contando las pelotas, es decir, podemos ir sacándolas una por una e ir echándolas en otra bolsa y diciendo, para cada una de ellas, de manera consecutiva: uno, dos, tres, cuatro,... Al sacar la última pelota diremos un cierto número; este número será la cantidad de pelotas que había en la bolsa.

Lo que hemos hecho es, dicho en cierta forma, asociar a cada pelota una etiqueta ficticia con el número que le corresponde. Es decir, hemos comparado el *conjunto* de pelotas con el *conjunto* de números consecutivos 1, 2, 3, 4, ... hasta el número que corresponde al total de pelotas en la bolsa.

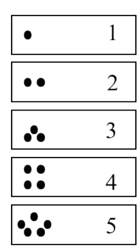
Estos números posibles son los números naturales.

En otras palabras:

Números naturales	Los números naturales son los que de manera natural sirven para medir el tamaño de los conjuntos.

Ejemplo 1 Tenemos las correspondencias entre conjuntos y números naturales como se ilustra en el dibujo:

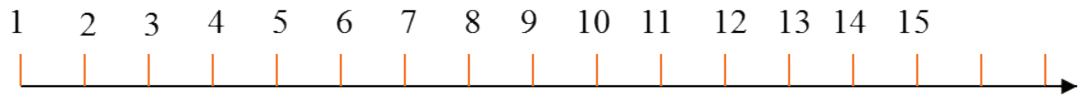
Hay una **infinidad** de números naturales.
Los primeros de ellos son:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
... Se escriben haciendo uso de los **dígitos**
0, 1, 2,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



La colección de los números naturales se caracteriza por tener un primer elemento a saber, el número 1, y porque cada uno de ellos se obtiene sumándole 1 al anterior:

$$1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 2+1,\ 4 = 3+1,\ 5 = 4+1, \text{ etc...}$$

Podemos representar **gráficamente** en una recta los números naturales como sigue:



Observamos un orden en los números naturales representados en la recta anterior: los números crecen a medida que avanzamos en la recta de izquierda a derecha. Un número natural en la recta es menor que otro si queda situado a su izquierda; es mayor, si queda situado a la derecha.

Para indicar que un número es menor que otro se emplea el símbolo "$<$". Del mismo modo se introduce el símbolo "$>$" para indicar que un número es mayor que otro. Por ejemplo,

5 es menor que 7, y escribimos $5 < 7$; o 12 es mayor que 8, $12 > 8$.

Los números naturales son suficientes para una buena cantidad de aplicaciones, puesto que podemos efectuar operaciones con ellos.

Ejemplo 2

Tu papá te dio 1,000 pesos el domingo y tu abuelita te regaló 4,000 pesos por tu cumpleaños. ¿Cuánto dinero tenías si con lo que te dieron juntaste lo suficiente para comprarte un rompecabezas que costó 11,000 pesos?

Para saber cuánto tenías, hay que restar del precio del rompecabezas lo que te dieron tu papá y tu abuelita:

Si queremos calcular lo que te dieron entre tu papá y tu abuelita, tenemos que sumar: Recibiste $1{,}000 + 4{,}000 = 5{,}000$ pesos.

Ahora sólo tenemos que restar de lo que costó el rompecabezas la cantidad que recibiste: $11{,}000 - 5{,}000 = 6{,}000$. Luego, 6,000 pesos era la cantidad que tenías.

Observa:

Cada vez que tenemos un número natural, obtenemos el siguiente simplemente sumándole una unidad, es decir, sumándole 1, por lo tanto, este proceso no tiene fin. Así, la colección de números naturales es infinita.

Notación: Al conjunto de los números naturales se le denota con el símbolo $\mathbb{N}$ Así $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$

Para saber más ...

En símbolos algebraicos:

Si n es un número natural, el número siguiente es $n+1$.

Si m y n son números naturales, entonces $m < n$, o $n > m$, si m está a la izquierda de n

1.2 Operaciones con números naturales

Suma

Supongamos que tenemos una bolsa con 12 pelotas y otra bolsa con 17 pelotas. Si juntamos ambas en una sola bolsa, ¿cuántas pelotas tendremos?

Claramente la respuesta es 29 pelotas; esto no lo adivinamos, lo sabemos, pues conocemos la operación **suma** que hay que realizar con el número de pelotas en una bolsa *más* el de la otra, es decir,

$$\mathbf{12 + 17 = 29}$$

Ésta es la operación **suma**.

Resta

Si ahora extraemos 22 pelotas de la bolsa que contiene las 29, ¿cuántas nos quedarán en la bolsa?

Es claro que la respuesta es, en este caso, 7, en vista de que la operación que hay que realizar ahora es una **resta** del número de pelotas que hay en la bolsa *menos* las que estamos extrayendo, es decir,

$$\mathbf{29 - 22 = 7}$$

Ésta es la operación **resta**.

Multiplicación

Si ahora tenemos 8 bolsitas con 7 pelotas en cada una y las juntamos en una sola bolsa, ¿cuántas pelotas tendremos en total?

No hay duda de que serán 56, puesto que ahora debemos hacer la **multiplicación**

del número de pelotas de cada bolsita *por* el número de bolsitas, es decir,

$$\mathbf{8 \times 7 = 56}$$

Ésta es la operación **multiplicación**. A veces se escribe también $8 \cdot 7 = 56$.

Tenemos así:

Operaciones básicas	Hay tres operaciones básicas en los **números naturales**: La **suma** $(+)$, la **resta** $(-)$, y la **multiplicación** $(\times, \bullet)$. En algunos casos, también se tiene la **división** $(\div)$, pero en general no.

Actividades 1

1. En tu casa se acaba una botella de aceite cada mes y una de vinagre cada dos meses. ¿Cuántas botellas de cada uno consumen en un año?

2. Si la botella de aceite cuesta 6,000 pesos y la de vinagre 2,500 pesos, ¿cuánto gastan en tu casa al año entre aceite y vinagre?

   ¿Y al mes?

3. En una tienda venden una lavadora por sólo 1,000 pesos diarios, para pagarla sin intereses en un año.

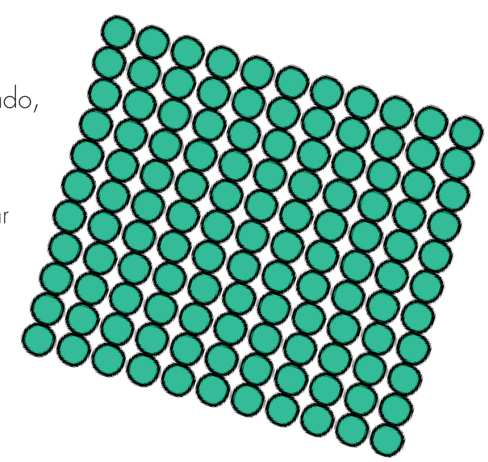
   (a) ¿Cuánto hay que pagar al mes para comprar la lavadora?

   (b) ¿Cuánto habría que pagar al trimestre si de esa manera se quisiera hacer el pago?

   (c) ¿Cuál es el precio de la lavadora?

   Nota. Considera que un año tiene 360 días y un mes 30 días.

Potencias



Si queremos realizar un arreglo con pelotas en forma de cuadrado, con 11 pelotas por lado, ¿cuántas pelotas necesitamos?

Claramente necesitamos multiplicar 11 por 11, es decir, tomar el **cuadrado** (o segunda potencia) de 11.

Lo escribimos $11^2 = 121$. Si deseamos llenar un cubo, de lado 11, tomamos el **cubo** (o tercera potencia)

$$11^3 = 1331.$$

RECORDEMOS

La **suma** de dos números nos indica el resultado de ponerlos juntos:

$$3 + 5 = 8$$
$$12 + 7 = 19$$

La **resta** de dos números nos indica el resultado de quitarle a uno el otro:

$$8 - 5 = 3$$
$$19 - 7 = 12$$

La **multiplicación** de dos números nos indica el resultado de tomar uno de ellos tantas veces como lo indica el otro:

$$3 \times 5 = 15$$
$$12 \times 7 = 84$$

La **división** de un número entre otro nos indica cuántas veces cabe el segundo en el primero:

$$15 \div 3 = 5$$
$$84 \div 12 = 7$$

La **potencia** de un número nos indica el producto del número consigo mismo tomándolo varias veces como factor:

$$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2{,}401$$

Actividades 2

1. Cuenta cuántos niños y cuántas niñas hay en tu salón. ¿Cuántos alumnos en total habrá en tu salón?

2. Si se salen 3 niños y 2 niñas. ¿Cuántos alumnos quedarán?

3. Considera que están bien acomodadas las sillas de tu salón. Cuenta cuántas hay enfrente y cuántas hacia el fondo. Calcula cuántas habrá en total.

4. Masako, una japonesita, hace collares de perlas.

   (a) Si tiene 2,520 perlas y necesita 60 para hacer un collar. ¿Cuántos collares hará?

   (b) Si quisiera hacer 72 collares. ¿Cuántas perlas deberá ensartar en cada uno?

   (c) ¿Y si sólo quisiera hacer 40?

   (d) Si quisiera hacer sólo collares con 75 perlas. ¿Podría usarlas todas? ¿Cuántas le sobrarían?

1.3 Combinación de la suma y la multiplicación

Ley distributiva

Calcula, sin escribir, el producto 104×7.

Hacer un cálculo como éste sin escribir requiere que conozcamos bien los números que multiplicamos y cómo se vinculan la suma y el producto.

Lo hacemos así:

Primero observamos que $104 = 100+4$. De ahí concluimos que 104×7 debe ser lo mismo que $100\times7 + 4\times7$; el primer producto es muy sencillo, ya que multiplicar por 100 es agregar dos ceros, por tanto resulta igual a 700; para el segundo necesitamos solamente la tabla del 4 (o del 7) y sabremos que el resultado es 28. Consecuentemente,

$$104\times7 = 700+28 = 728.$$

Éste es el proceso mental que debemos llevar a cabo para esta operación; no se necesita escribir.

Después de descomponer el número 104 como $100 + 4$, ¿qué hicimos? Simplemente multiplicamos cada sumando por 7 y sumamos los resultados. Aplicamos la ley distributiva.

Ley distributiva	La **ley distributiva** nos dice que para multiplicar una suma por un factor, basta multiplicar cada sumando y sumar los resultados.

Ejemplos

1. $(5 + 8)\times3 = 5\times3 + 8\times3 = 15 + 24 = 39$
2. $(14 + 19)\times5 = 14\times5 + 19\times5 = 70 + 95 = 165$

También funciona con la resta:

3. $(8 - 3)\times4 = 8\times4 - 3\times4 = 32 - 12 = 20$
4. $(17 - 13)\times5 = 17\times5 - 13\times5 = 85 - 65 = 20$

No importa el orden:

5. $7\times(5 + 3) = 7\times5 + 7\times3 = 35 + 21 = 56$
6. $5\times(23 - 11) = 5\times23 - 5\times11 = 115 - 55 = 60$

Leyes conmutativas

Aprovechemos para recordar otras dos importantes leyes de los números.

Leyes conmutativas	Las **leyes conmutativas** nos dicen que para sumar o multiplicar **números naturales**, el orden es indiferente.

Ejemplos	7. $5 + 8 = 8 + 5 = 13$ 8. $247 + 324 = 324 + 247 = 571$ **También funciona con la multiplicación:** 9. $8 \times 4 = 4 \times 8 = 32$ 10. $1{,}713 \times 5 = 5 \times 1{,}713 = 8{,}565$

Actividades 3

Sin escribir, realiza las siguientes multiplicaciones

1. 107×8	3. 1003×15	5. 193×4
2. 94×7	4. 985×6	6. 1206×3

Aplica la ley distributiva y multiplica

1. $15 \times (20 + 2)$	3. $(40 - 3) \times 13$	5. $(13 + 5) \times 4$
2. $5 \times (140 + 55)$	4. $(128 - 47) \times 11$	6. $(60 - 3) \times 7$

Aplica la ley distributiva y saca el factor común

1. $17\times16 + 17\times4$	3. $15\times13 + 18\times13$	5. $119\times4 + 7\times4$
2. $23\times18 + 23\times2$	4. $56\times11 - 47\times11$	6. $6\times46 - 6\times31$

Para saber más...

Las leyes distributiva y conmutativa de la suma y la multiplicación pueden expresarse en forma algebraica de la siguiente manera:

Ley distributiva

Si m, n y p representan números naturales, entonces:

$(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ $\quad$ $(m - n) \cdot p = m \cdot p - n \cdot p$

$p \cdot (m + n) = p \cdot m + p \cdot n$ $\quad$ $p \cdot (m - n) = p \cdot m - p \cdot n$.

Leyes conmutativas

Si m y n representan números naturales, entonces:

$m + n = n + m$ $\quad$ $m \cdot n = n \cdot m$

1.4 Divisibilidad de números naturales

Si hiciste bien tus cuentas, en la pregunta 4(d) de las actividades 2 en la sección1.2, debiste obtener 45 como residuo; es decir, si Masako hiciera 33 collares de 75 perlas cada uno, le sobrarían 45, puesto que la división 2,520 ÷75 **no es exacta**. Sin embargo, en 4(a), la división 2,520 ÷60 **sí es exacta**, pues da 42 y no sobra nada: **el residuo es** 0.

Otro ejemplo

Pongamos por caso que nos dan una bolsa con 56 pelotas para repartirlas entre 27 niños. Nos preguntamos, ¿cuántas pelotas le tocarán a cada niño?

El resultado será, en este caso, 2 pelotas para cada niño; pero... Resulta que quedará un resto, un residuo de 2 pelotas en la bolsa.

Así, al hacer la **división** de 56 (dividendo) entre 27 (divisor) obtenemos 2 (cociente) y restan (o sobran) 2 (residuo), es decir,

$$\begin{array}{r|l} 56 & 27 \\ \cline{2-2} -54 & 2 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Si la bolsa tuviese solamente 54 pelotas, en vez de 56, entonces no quedaría ningún resto, es decir, el residuo sería de 0 pelotas. En este caso podemos escribir

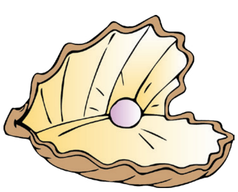
$$\begin{array}{r|l} 54 & 27 \\ \cline{2-2} -54 & 2 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$54 \div 27 = 2$$

Tenemos así:

División exacta	Una **división es exacta** si el residuo es 0. Es decir, si el **dividendo** es igual al **divisor** multiplicado por el **cociente**.

División no exacta	Una **división no es exacta** si el residuo no es 0. Es decir, si el dividendo es igual al **divisor** multiplicado por el **cociente** más un **residuo** que es distinto de 0.



Ejemplo 1

Si Masako al día siguiente tuviera 2,535 perlas, es decir, 15 más, haría 42 collares de 60 perlas, pero le sobrarían 15.

Estas 15 perlas son el **residuo** de la división 2,535 ÷60.

Múltiplos y divisores	Un número natural es **múltiplo** de otro cuando se puede dividir exactamente entre el otro. Éste otro es **divisor** del primero.

Ejemplo 2	2,520 es **múltiplo de** 72, puesto que $2{,}520 = 72 \times 35$. 35 y 72 son **divisores de** 2,520. También decimos que 35 y 72 **dividen a** 2,520. 2,535 no es múltiplo de 72, ya que $2{,}535 = 72 \times 35 + 15$. El **residuo** es, en este caso, 15, que es distinto de 0.

Notación	El símbolo $\mid$ significa **divide a** y el símbolo $\nmid$ **no divide a**. Así que $3 \mid 9$ nos dice que 3 divide a 9 mientras que $4 \nmid 9$ nos dice que 4 no divide a 9.

Para saber más...

Hay veces que la división es exacta y otras no.
En **símbolos algebraicos** se tiene:

División exacta	Si D es el dividendo, d el divisor y C es el cociente, la división es exacta si se cumple $D = d\,.C$.
División no exacta	Si D es el dividendo, d el divisor, C es el cociente y R el residuo se escribe $D = d\,.C + R$. La división no es exacta si $R \neq 0$. La división es exacta si $R = 0$.
Múltiplos y divisores	Un número natural a es múltiplo de otro número natural b, si $a = b \cdot c$ y c es otro número natural. En este caso, b es divisor de a.

1.5 Criterios de divisibilidad

En muchos casos es fácil determinar si un número es divisible entre otro. Aquí aprenderemos posibilidades de determinarlo rápidamente.

En algunos casos, la divisibilidad es fácil de determinar a través de la última cifra del número en cuestión. Antes de abordar el problema analicemos unas reglas simples.

Divisibilidad de una suma

Supongamos que queremos determinar si 7 es un divisor de 714. Una posibilidad es calcular **$714 \div 7 = 102$.** Sin embargo, frecuentemente es posible hacer esto de manera más sencilla con la ayuda de una **descomposición** en forma de una suma:

$$714 = 700 + 14 = 7\times100 + 7\times2 = 7\times(100 + 2) = 7\times102$$

En vista de que ambos sumandos **700 y 14 son divisibles entre 7**, su suma $700 + 14 =$ **714 también es divisible entre 7.**

$4|40$ y $4|12$, por lo tanto, $4|52$

Regla de la suma: Si podemos dividir ambos sumandos entre un cierto número natural, también podremos dividir su suma.

- Investiga si $6|78$ (realiza la descomposición $78 = 60 + 18$).
  ¿Son ciertas las afirmaciones: $12|180$; $13|169$, $23|253$?

¿Funciona la regla de la suma también para restas? Investígalo en los siguientes ejemplos y formula una afirmación análoga a la regla de la suma.

(a) $5|45 - 10$ (b) $3|27 - 12$ (c) $2|8 - 6$ (d) $13|182 - 117$

Sabemos que $7 \nmid 852$ puesto que $852 = 7\times120 + 12$. Esto podemos determinarlo también descomponiendo en una suma:

$$852 = 840 + 12 = 7\times120 + 7\times1 + 5 = 7\times(120 + 1) + 5 = 7\times121 + 5.$$

Si tenemos que un sumando es divisible entre un cierto número natural, pero el otro no lo es, entonces tampoco lo es la suma.

$7|49$ y $7\nmid12$, por lo tanto, $7 \nmid 61$

- Investiga si 13 es divisor de 147 (realiza la descomposición $147 = 130 + 17$).
  ¿Es cierto que $11|107$? (Escribe $107 = 110 - 3$.)
  Investiga si 14 divide a:
  (a) 154 (b) 182 (c) 126
  (d) 1,428 (e) 1,397 (f) 14,042.

Ejercicios 1.5

1. ¿Qué afirmaciones son ciertas y cuáles son falsas?
   (a) $3|12 + 17$ (b) $5|20 - 5$ (c) $8|16 + 14$
   (d) $7|28 + 35$ (e) $6|6 + 6$
2. ¿Es 4 un divisor de $16 + 32$? ¿Y de $16 + 32 + 24$?
3. ¿Es 3 un divisor de $6 + 12 + 21 + 9$?
4. ¿Es 7 un divisor de $35 + 21 + 8 + 14$?

5. Descomponiendo en sumas o diferencias indica cuáles afirmaciones son ciertas y cuáles son falsas.

(a) $3 \mid 36$ (b) $6 \mid 54$ (c) $4 \mid 38$ (d) $5 \mid 205$ (e) $18 \mid 2{,}000$

(f) $7 \mid 84$ (g) $13 \mid 1{,}287$ (h) $34 \mid 372$ (i) $13 \mid 273$ (j) $19 \mid 181$

6. En los siguientes ejercicios ninguno de los dos sumandos es divisible entre el número dado.

La suma sí puede serlo: ¡investígalo!

Ejemplo: $3 \nmid 7$ y $3 \nmid 11$, pero $3 \mid 7 + 11 = 18 = 3 \times 6$.

(a) $5 \mid 11 + 4$ (b) $7 \mid 11 + 3$ (c) $8 \mid 18 + 6$ (d) $7 \mid 13 + 8$ (e) $5 \mid 131 + 54$

El producto 6×14 puede escribirse como la suma $14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$

El 7 divide a cada sumando, por lo que también divide a la suma y con ello también al producto 6×14. Lo importante es, pues, el hecho de que 7 divide al factor 14.

Podemos afirmar:	Un producto es divisible entre un número primo dado si al menos uno de los factores lo es.

7. De cada una de las siguientes afirmaciones di si es verdadera (V) o falsa (F):

(a) $3 \mid 4 \times 9$ (b) $6 \mid 12 \times 4$ (c) $4 \mid 38$ (d) $5 \mid 205$ (e) $18 \mid 2{,}000$

(f) $7 \mid 84$ (g) $13 \mid 1{,}287$ (h) $34 \mid 372$ (i) $13 \mid 273$ (j) $19 \mid 1$

- Investiga si $10 \mid 2{,}570$; $5 \mid 485$; $2 \mid 346$; $5 \mid 7{,}423$; $2 \mid 68{,}431$; $10 \mid 742$.

Claramente las tres primeras afirmaciones son verdaderas, mientras que las tres últimas son falsas. Esto se debe a las reglas, ya bien conocidas:

Divisibilidad entre 10, 5 y 2	Un número **es divisible entre 10** si su última cifra es 0. Un número **es divisible entre 5** si su última cifra es 0 o 5. Un número **es divisible entre 2** si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8.

Estas reglas son muy útiles, puesto que de un solo vistazo podemos decidir si un número es divisible entre 10, 5 o 2.

Decimos: Un número **es par** si es divisible entre 2, es decir, si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8.

Alicia comenta: Yo puedo decidir si un número es divisible entre 4 solamente observando sus dos últimas cifras. Lo fundamenta así:

Tomemos por ejemplo 1,764.

$$1{,}764 = 1{,}700 + 64 = 17\times 100 + 64.$$

Cada centena es divisible entre 4:

$$100 = 25\times 4$$

$$200 = 2\times 100 = 2\times 25\times 4$$

$$300 = 3\times 100 = 3\times 25\times 4 \text{ etc.}$$

Así, es claro que 1700 es divisible entre 4. Nos queda sólo por revisar 64.

Calculo: $64 = 8\times 8 = 8\times 2\times 4$.

RESULTADO: $4\,|\,1{,}764$

- ¿Son válidas las afirmaciones $4\,|\,6'432{,}908$; $4\,|\,235{,}122$?

Podemos afirmar:	**Divisibilidad entre 4** Un número es **divisible entre 4** si el número formado por sus dos últimas cifras es divisible entre 4.

Problema

Fundamenta por qué en las reglas para 2, 5, 10 solamente es necesario considerar la última cifra.

- Cada centena es divisible entre 25. ¿Cómo podemos entonces determinar rápidamente la divisibilidad entre 25 de 5,475? ¿Y la de 83,425; 143,285; 3'483,250; 2,476'572,953?

Ejercicios 1.5

8. Analiza en cada uno de los siguientes casos si el número dado es divisible entre 3, 5, 4 o 12.

   (a) 96 (b) 16 (c) 48 (d) 1 (e) 32
   (f) 57 (g) 61 (h) 45 (i) 200 (j) 130

9. Revisa cada una de las siguientes afirmaciones e indica cuál es falsa y cuál es verdadera.

   (a) $3\,|\,15$ (b) $4 \nmid 13$ (c) $3\,|\,5$ (d) $7\,|\,15$ (e) $7\,|\,77$
   (f) $24 \nmid 48$ (g) $10\,|\,200$ (h) $11\,|\,21$ (i) $8\,|\,4$ (j) $9\,|\,3$
   (k) $1\,|\,18$ (l) $7\,|\,1$ (m) $1 \nmid 12$ (n) $14 \nmid 28$

10. En el cuadrito coloca el símbolo $|$ o $\nmid$, de modo que la afirmación se cumpla.

(a) 6 □ 24 (b) 9 □ 3 (c) 25 □ 45 (d) 8 □ 1 (e) 7 □ 49

(f) 13 □ 13 (g) 4 □ 34 (h) 1 □ 23 (i) 31 □ 3,162 (j) 14 □ 5,672

(k) 9 □ 3,411 (l) 25 □ 83,475 (m) 3 □ 4,321 (n) 11 □ 121

(o) 5 □ 8,565 (p) 4 □ 2,422 (q) 16 □ 4,096

11. Revisa cada una de las siguientes afirmaciones e indica cuál es falsa y cuál es verdadera.

(a) $5\,|\,15+17$ (b) $3\,|\,6+9$ (c) $10\,|\,30-13$ (d) $7\,|\,7+7$

(e) $23\,|\,230-23$ (f) $4\,|\,28+23$ (g) $2\,|\,16-6$ (h) $5\,|\,12+5$

(i) $11\,|\,11+21$ (j) $25\,|\,75+14$

12. Sin hacer las operaciones, responde las siguientes preguntas.

(a) ¿Es 4 un divisor de $16+28$? (b) ¿Es 4 un divisor de $16+28+32$?

(c) ¿Es 3 un divisor de $6+15+9+27$ (d) ¿Es 5 un divisor de $30+45+23+65$?

Pregunta: ¿Es 3 un divisor de $5\times999 + 3\times99 + 8\times9$?

Hay dos formas de abordarlo:

NATALIA CALCULA:

$5\times999 + 3\times99 + 8\times9 =$
$= 4995 + 297 + 72 =$
$= 5364$

y después

```
5364 | 3
-3     1788
 23
-21
  26
 -24
   24
  -24
    0
```

SEBASTIÁN MEDITA:

Los números 999, 99 y 9 son todos divisibles entre 3. Así, los productos 5×999, 3×99, 8×9 también son divisibles entre 3,

y ya que cada sumando es divisible entre 3, entonces lo es toda la suma.

Ambos niños llegan al mismo resultado. ¿Quién lo hizo más rápidamente?

Podemos aprovechar la reflexión de Sebastián:

Ejemplo 1

¿Es 3 divisor de 825?

$$\mathbf{825} = 8\times 100 + 2\times 10 + 5$$
$$= 8\times(99+1) + 2\times(9+1) + 5$$
$$= 8\times 99 + \mathbf{8}\times 1 + 2\times 9 + \mathbf{2}\times 1 + \mathbf{5}$$
$$= 8\times 99 + 2\times 9 + 8 + 2 + 5$$
$$= \underbrace{8\times 99 + 2\times 9}_{\text{Sin duda es divisible entre 3}} + \mathbf{15}$$

¿Es divisible entre 3?

Si todos los sumandos son divisibles entre 3, entonces también la suma lo es.

Ejemplo 2

¿Es 3 divisor de 4,736?

$$\mathbf{4736} = 4\times 1{,}000 + 7\times 100 + 3\times 10 + 6$$
$$= 4\times(999+1) + 7\times(99+1) + 3\times(9+1) + 6$$
$$= 4\times 999 + \mathbf{4}\times 1 + 7\times 99 + \mathbf{7}\times 1 + 3\times 9 + \mathbf{3}\times 1 + \mathbf{6}$$
$$= 4\times 999 + 7\times 99 + 3\times 9 + \mathbf{4} + \mathbf{7} + \mathbf{3} + \mathbf{6}$$
$$= \underbrace{4\times 999 + 7\times 99 + 3\times 9}_{\text{Sin duda es divisible entre 3}} + \mathbf{20}$$

¿Es divisible entre 3?

Ya que 9, 99, 999, etc., son números divisibles entre 3, en los ejemplos anteriores la suma 8 + 2 + 5 y la suma 4 + 7 + 3 + 6 son las que deciden la divisibilidad entre 3; a cada una de estas sumas la llamamos **suma transversal**, de 825 y de 4,736, respectivamente.

Podemos concluir:

Divisibilidad entre 3	Un número natural es **divisible entre 3** si su suma transversal es divisible entre 3.

De forma semejante podemos razonar considerando nuevamente el ejemplo 1.

Ejemplo 3

¿Es 3 divisor de 825?

$$
\begin{aligned}
\mathbf{825} &= 8\times 100 + 2\times 10 + 5\\
&= 8\times(99+1) + 2\times(9+1) + 5\\
&= 8\times 99 + \mathbf{8}\times 1 + 2\times 9 + \mathbf{2}\times 1 + \mathbf{5}\\
&= 8\times 99 + 2\times 9 + 8 + 2 + 5\\
&= \underbrace{8\times 99 + 2\times 9}_{\text{Sin duda es divisible entre 3}} + \mathbf{15}
\end{aligned}
$$

¿Es divisible entre 3?

Ya que 9, 99, 999, etc, no son sólo divisibles entre 3 sino entre 9, podemos concluir:

Divisibilidad entre 9	Un número natural es **divisible entre 9** si su suma transversal es divisible entre 9.

Ejercicios 1.5

13. (a) Enuncia todos los números de dos cifras con suma transversal igual a 5, 8, 11 y 18.

    (b) Enuncia todos los números de tres cifras con suma transversal igual a 3.

14. Describe como conjunto a los números de tres cifras tales que

    (a) su suma transversal es 5, 19, 31; (b) su suma transversal es 13 y su primera cifra es 7.

15. Verifica si los siguientes números son divisibles entre 3 o entre 9.

    (a) 57 (b) 84 (c) 242 (d) 36,272 (e) 648

    (f) 5,004 (g) 111'111,111

Ejercicios variados 1.5

1. Completa correctamente las siguientes expresiones:

   $5 + 8 = \square$ $14 + 87 = \square$ $27 + \square = 51$

$\square + 42 = 138$	$17 - 11 = \square$	$198 - 117 = \square$
$1{,}999 - \square = 1{,}000$	$14 \times 5 = \square$	$1{,}312 \times 31 = \square$
$173 \times \square = 692$	$\square \times 13 = 351$	$1{,}998 \div 18 = \square$
$235 \div 5 = \square$	$\square \div 17 = 23$	$594 \div \square = 99$
$2{,}000 = 18 \times \square + \square$	$875 = 10 \times \square + \square$	$544 = 6 \times \square + \square$
$(3 + 11) \times 7 = \square$	$(16-7) \times 7 = \square$	$(197-45) \times 4 = \square$
$(87 + \square) \times 3 = 300$	$(\square + 17) \times 7 = 350$	$(824 - 132) \times \square = 2{,}076$

2. Cada año que es divisible entre 4 es bisiesto (...,2000, 2004, 2008,...), es decir, tiene 366 días, con la excepción de los años divisibles entre 100 a menos que sean divisibles entre 400 (1700, 1800 y 1900 no fueron bisiestos pero 2000 sí). ¿Qué matemáticos de la tabla nacieron en año bisiesto?, ¿quiénes murieron en año bisiesto? Y tú, ¿naciste en año bisiesto?

René Descartes	1596-1650
Pierre de Fermat	1601-1665
Isaac Newton	1643-1727
Carlos de Sigüenza y Góngora	1645-1700
Gottfried Leibniz	1646-1716
Sotero Prieto	1884-1935
Guillermo Torres	1919-1990

3. Puedes hacer magia con tus amigos: Diles que escojan el número que sea; luego pídeles que lo multipliquen por 9 y que le tachen la cifra que quieran, que no sea 0. Después diles que sumen las cifras del número que quedó y te den el resultado. Tú puedes entonces decirles qué cifra tacharon. ¿Cómo puedes hacerlo?

4. Considera el número **572,289.** ¿Cuánto es lo mínimo que tendrías que sumarle para que el resultado sea divisible entre 6? (Recuerda que un número es divisible entre 6 si lo es entre 3 y entre 2.) Contesta la misma pregunta para **421,254, 721,283** y **56'274,427.**

1.6 Comunes divisores y múltiplos comunes

Ejemplo 1

En un mercado de pulgas, de ésos en donde se venden cosas usadas, se ponen de acuerdo todos los participantes para vender sus cosas, ya sea en 56 mil pesos o en 84 mil pesos. Como el dinero que se junte será para la comunidad, deciden que no se pague con dinero en efectivo, sino que los compradores adquieran boletos en la entrada para hacer sus compras con ellos. Como se trata de hacer la mínima inversión, quieren mandar imprimir sólo boletos iguales, de la misma denominación; pero también quieren mandar imprimir el menor número posible de ellos. ¿Cuál es el valor más conveniente de los boletos?

Para responder a esta pregunta, lo que conviene es revisar qué denominaciones servirían para pagar los objetos de 56 mil pesos y cuáles las que sirven para pagar los de 84 mil pesos. Podemos anotarlas en las siguientes tablas:

Posibles denominaciones de los boletos en miles	**1**	**2**	**4**	**7**	**8**	**14**	**28**	**56**
Número de boletos necesarios para pagar 56 mil pes. pesos	**56**	**28**	**14**	**8**	**7**	**4**	**2**	**1**

Otras denominaciones no son posibles, ya que los únicos divisores de 56 son los que aparecen en la tabla. Lo mismo ocurre para 84 en la tabla de abajo.

Denominaciones	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**12**	**14**	**21**	**28**	**42**	**84**
Número	**84**	**42**	**28**	**21**	**14**	**12**	**7**	**6**	**4**	**3**	**2**	**1**

Para objetos tanto de 56 mil pesos como de 84 mil pesos servirían solamente los boletos de 1, 2, 4, 7, 14 y 28 mil pesos; éstos son los **divisores comunes** de 56 y 84. El más grande de ellos, 28, es el **máximo común divisor** de 56 y 84.

Así, la solución a nuestro problema es emitir boletos de 28 mil pesos. Así, tendrán que utilizar 2 para pagar las cosas que cuesten 56 mil pesos y 3 para los que cuesten 84 mil. Esta es la forma en la cual tendremos que mandar imprimir el menor número de boletos.

Ejercicios 1.6

1. Escribe la lista de divisores de 36 y la lista de divisores de 60 y de ambas deduce cuál es el máximo común divisor de 36 y 60.

2. ¿Cuál es el máximo común divisor de 16 y 12, 40 y 64, 27 y 72, 45 y 60, 27 y 32?

Notación: En la pregunta anterior, lo que estamos preguntando, escrito en símbolos, es por MCD(36,60), MCD(16,12), MCD(40,64), MCD(27,72), MCD(45,60), MCD(27,32). El símbolo MCD significa **máximo común divisor**

Para saber más ...

En **símbolos algebraicos**: M es el máximo común divisor de p y q si es el número natural más grande tal que $M|p$ y $M|q$. Se escribe $M = MCD(p,q)$.

Volvamos a la última parte de la pregunta, es decir calcular MCD (27,32). Observamos que en en este caso, los divisores de 27 no son más que 1, 3, 9 y 27, mientras que los de 32 son 1, 2, 4, 8, 16 y 32. (En realidad, 27 es potencia de 3, por lo que no tiene como divisores más que a potencias de 3, mientras que 32 es potencia de 2, por lo que tiene como divisores solamente a potencias de 2.) El máximo común divisor, en este caso, es el único número que es divisor de **todos** los números, a saber, es 1. Cuando los únicos divisores de un número son 1 y el mismo número, decimos que el número es **primo**. Ahora, si el máximo común divisor de dos números es 1, decimos que los números son **primos relativos** o **primos entre sí**.

Ejercicios 1.6

3. Encuentra parejas de números que sean primos relativos.

4. Encuentra los divisores comunes de las siguientes parejas de números.

(a) 42 y 92	(b) 72 y 108	(c) 102 y 90	(d) 121 y 66
(e) 58 y 46	(f) 34 y 68	(g) 70 y 105	(h) 154 y 242
(i) 88 y 90	(j) 45 y 52	(k)138 y 176	(l) 56 y 112

5. Calcula el máximo común divisor de las siguientes parejas de números.

(a) 32 y 72	(b) 82 y 98	(c) 114 y 92	(d) 122 y 66
(e) 48 y 46	(f) 54 y 98	(g) 75 y 105	(h) 54 y 231
(i) 68 y 80	(j) 47 y 51	(k) 132 y 75	(l) 56 y 112

6. Si conocemos el máximo común divisor de una pareja. ¡Calcula los demás divisores comunes!

(a) MCD(36,24) = 12 (b) MCD(56,70) = 14 (c) MCD(102,68) = 34
(d) MCD(132,88) = 22 (e) MCD(38,46) = 2 (f) MCD(728,1,008) = 56
(g) MCD(75,125) = 25 (h) MCD(11,40,1,520) = 380

7. De las siguientes parejas, determina cuáles están formadas por primos relativos.

(a) 14 y 21 (b) 12 y 15 (c) 15 y 16 (d) 15 y 21
(e) 111 y 74 (f) 111 y 101 (g) 961 y 1849 (h) 640 y 285

8. Encuentra los divisores comunes de las siguientes parejas de números.

(a) 42 y 92 (b) 72 y 108 (c) 102 y 90 (d) 121 y 66
(e) 58 y 46 (f) 34 y 68 (g) 70 y 105 (h) 154 y 242
(i) 88 y 90 (j) 45 y 52 (k) 138 y 176 (l) 56 y 112

9. Calcula el máximo común divisor de las siguientes colecciones de números.

(a) 32,24,72 (b) 36,96,132 (c) 1200,140,560 (d) 6,7,8,9
(e) 70,110,140,95 (f) 60,70,80,90 (g) 11,13,15,17 (h) 15,18,21,24

10. En cada caso encuentra todos los números naturales a entre 1 y 15 de manera que sean ciertas las siguientes afirmaciones:

(a) MCD(a,24) = 4 (b) MCD(a,75) = 15 (c) MCD(9, a) = 3
(d) MCD(12, a) = 1 (e) MCD(38,a) = 2 (f) MCD(a,10) = a

Ejemplo 2

Sebastián y su papá se fueron de paseo a caminar por el campo. Como la tierra está floja, se van marcando sus huellas. El papá da pasos de 80cm, mientras que Sebastián los da de 50cm. ¿Después de qué distancia vuelve a pisar Sebastián la huella de su papá? ¿Cuántos pasos da uno y cuántos da el otro en ese tramo?

Para responder a esta pregunta, lo que conviene es revisar las distancias que tienen las huellas del papá y de Sebastián desde su punto de partida. Podemos anotarlas en las siguientes tablas:

Número de pasos	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Distancia de las huellas del papá	80	160	240	320	400	480	560	640	720

Número de pasos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Huellas de Sebastián	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700

Vemos que la distancia recorrida por el papá, después de 5 pasos es de 400cm, es decir, de 4m; es la misma distancia recorrida por Sebastián después de 8 pasos. Antes de esa distancia, los pasos de Sebastián y del papá no coinciden.

La coincidencia será, pues, a los 400cm, a los 800cm, a los 1,200cm, etc. Todos estos números son múltiplos de 80cm, que es la longitud de los pasos del papá, pero también son múltiplos de 50cm, que es la longitud de los pasos de Sebastián. Es decir, son **múltiplos comunes** de 80 y 50. El más pequeño de ellos es 400, por lo que se dice que 400 es el **mínimo común múltiplo** de 80 y 50.

Ejercicio 1.6

11. Escribe la lista de múltiplos de 36 y la lista de múltiplos de 60 hasta 500 y de ambas deduce cuál es el mínimo común múltiplo de 36 y 60.

12. ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 16 y 12, 40 y 64, 27 y 72, 45 y 60, 27 y 32?

Notación

En la pregunta anterior, lo que estamos preguntando, escrito en símbolos, es calcular mcm (36,60), mcm (16,12), mcm (40,64), mcm (27,72), mcm (45,60), mcm (27,32).
El símbolo mcm significa **mínimo común múltiplo.**

Ejemplo 3

En la casa de Gabriela tienen un carro al que hay que hacerle mantenimiento adecuado para que siempre funcione bien. La tabla muestra lo que hay que hacerle:

Cambio de aceite del motor	cada 7,000 km
Cambio de aceite de la transmisión	cada 17,500 km
Limpieza de inyectores	cada 14,000 km
Cambio de filtro del aire	cada 10,000 km

(a) ¿A qué kilometraje hay que hacerle simultáneamente cambio de aceite de motor y de transmisión?
(b) ¿A qué kilometraje hay que hacerle simultáneamente los cuatro cambios?

Para responder a esta pregunta, lo que hay que hacer es

Ver cuáles son múltiplos comunes, según el caso. En (a), vemos que los múltiplos de 7,000 son 7,000;14,000; 21,000; 28,000; 35,000; etc. El segundo múltiplo de 17,500 es 35,000. Así, 35,000 es el mínimo común múltiplo de ambos y, por tanto, cada 35,000 km coincidirán los cambios de aceite de motor y de transmisión. ¿Cómo resuelves (b)?

Para saber más...

En **símbolos algebraicos**: m es el **mínimo común múltiplo** de p y q si es el número natural más pequeño que es múltiplo al mismo tiempo de p y q, es decir, es tal que $p \mid m$ y $q \mid m$. Se escribe $m = \text{mcm}\,(p,q)$.

Ejercicios variados 1.6

1. Las luces intermitentes de una señalización en la carretera encienden cada 9 segundos, mientras que la de otra lo hacen cada 12 segundos. Si las conectan al mismo tiempo, ¿después de cada cuántos segundos volverán a prenderse simultáneamente?

2. A las familias López, Pérez, Sánchez, Gómez y González les gusta ir a comer al mismo restaurante. Los López van todos los días, los Pérez cada dos días, los Sánchez cada tres días, los Gómez cada cuatro y los González cada cinco días. ¿Cuántas veces durante un año se encuentran las cinco familias al mismo tiempo en el restaurante si se encontraron todos juntos el 1 de enero? ¿Y si en vez del 1 de enero se encontraron todos juntos el 15 de enero?

3. Como sabes, un año normal tiene 365 días. Si lo dividimos entre 7, vemos que el resultado es 52 y el residuo es 1. Por eso, sabemos que un año tiene 52 semanas y que cada año se corre el día de la semana en el que cae cierta fecha un día, con respecto al año anterior. Por ejemplo, el 21 de marzo de 2013 fue jueves, pero el 21 de marzo de 2014 fue viernes y el de 2015 será sábado. Sin embargo, cada cuatro años el año es bisiesto, es decir, dura 366 días, por lo que ese año, las fechas posteriores al 29 de febrero, se corren dos días de la semana. Por lo tanto el 21 de marzo de 2016 será lunes y no domingo. Calcula el **ciclo calendárico**, es decir, después de cuántos años se vuelve a repetir el calendario solar completo.

4. El ciclo lunar es de 19 años, es decir, después de cada 19 años las lunas llenas y nuevas, así como los cuartos crecientes y menguantes vuelven a caer en las mismas fechas. Calcula cada cuánto tiempo se repiten los calendarios solar y lunar, para eso deberás tomar el mínimo común múltiplo de 19 y el resultado del ejercicio anterior. De este modo estarás calculando el llamado ciclo pascual. Cuando Dionisio el Exiguo determinó la era cristiana, en el año 532 de nuestra era, calculó también el **ciclo pascual**, con el que se rigen todas las celebraciones cristianas, como la Semana Santa y la Pascua, el Jueves de Corpus o Pentecostés.

1.7 Determinación del MCD y del mcm

Problema 1

Calcula el máximo común divisor de 1,260 y 2,940.

Para resolver este problema, lo que hay que hacer es descomponer cada uno de los dos números como un producto de números primos. Cada factor primo de un número, es un divisor; los factores primos comunes a ambos números, serán comunes divisores. El producto de todos los factores primos comunes será el máximo común divisor buscado. Para hacerlo, elabora una lista de los números primos que hay entre 1 y 100 y dividamos cada uno de los números en cuestión entre los primos, poco a poco. Veamos cómo:

En primer lugar, tomemos la lista de los primeros primos, para tenerla a la mano:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, etc.

Ahora veamos cuántas veces son nuestros números divisibles entre 2:

1,260 es par, por lo que es divisible entre 2, es decir:

$$1{,}260 = 2\times 630$$

2,940 es par, por lo que es divisible entre 2, es decir:

$$2{,}940 = 2\times 1{,}470$$

Nuevamente vemos que 630 y 1,470 son divisibles entre 2:

$630 = 2\times 315$, por lo que $1{,}260 = 2\times 2\times 315$

$1{,}470 = 2\times 735$, por lo que $2{,}940 = 2\times 2\times 735$

Vemos ahora que 315 y 735 no son divisibles por 2, proseguimos entonces investigando con el número primo siguiente que es el 3.

Nuestro criterio de divisibilidad entre 3 nos dice que tanto 315 como 735 son divisibles entre 3, pues sus respectivas sumas transversales son 9 y 15:

$$315 = 3\times 105, \text{ por lo que } \quad 1{,}260 = 2\times 2\times 3\times 105$$

$$735 = 3\times 245, \text{ por lo que } \quad 2{,}940 = 2\times 2\times 3\times 245$$

Ahora, sólo 105 sigue siendo divisible entre 3:

$$105 = 3\times 35, \text{ por lo que } \quad 1{,}260 = 2\times 2\times 3\times 3\times 35$$

Claramente 35 y 245 son divisibles entre 5:

$$35 = 5\times 7, \text{ por lo que } \quad 1{,}260 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5\times 7$$

$$245 = 5\times 49, \text{ por lo que } \quad 2{,}940 = 2\times 2\times 3\times 5\times 49$$

Finalmente, vemos que 49 = 7×7, por lo que tenemos:

$$1{,}260 = \mathbf{2}\times \mathbf{2}\times \mathbf{3}\times 3\times \mathbf{5}\times \mathbf{7}$$

$$2{,}940 = \mathbf{2}\times \mathbf{2}\times \mathbf{3}\times \mathbf{5}\times \mathbf{7}\times 7$$

Vemos que los divisores primos comunes son los marcados en rojo, es decir:

$$\mathbf{2}\times \mathbf{2}\times \mathbf{3}\times \mathbf{5}\times \mathbf{7} = \mathbf{420}$$

Concluimos de todo lo anterior que el máximo común divisor de 1,260 y 2,940 es 420.

Así: **MCD(1260, 2940) = 420**

Problema 2

Calcular el máximo común divisor de 18,900, 32,760 y 11,700.

$$\begin{array}{rl} 18{,}900 = & \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times \quad \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times 3\times \quad \mathbf{5}\times 5\times 7 \\ 32{,}760 = & \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times 2\times\mathbf{3}\times\mathbf{3}\times \quad \mathbf{5}\times \quad 7\times 13 \\ 11{,}700 = & \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times \quad \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times \quad \mathbf{5}\times 5\times \quad 13 \\ \hline & \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times \quad \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times \quad \mathbf{5} \quad = \mathbf{180} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 18{,}900 = & 2^2\times 3^3\times 5^2\times 7^1 \\ 32{,}760 = & 2^3\times 3^2\times 5^1\times 7^1\times 13^1 \\ 11{,}700 = & 2^2\times 3^2\times 5^2\times \quad 13^1 \\ \hline & 2^2\times 3^2\times 5 \quad = 180 \end{array}$$

El máximo común divisor se define por los factores primos que son comunes a todas las descomposiciones.

En forma de potencias, se toman los factores primos con el exponente más pequeño que aparezca en las descomposiciones de cada número.

Podemos concluir que, para calcular el **máximo común divisor** de una colección de números naturales, hay que descomponerlos como productos de números primos. Entonces, el MCD es el producto de las potencias de los primos que son comunes a todas las descomposiciones de los números, tomados con el menor de todos los exponentes.

Problema 3

Calcula el mínimo común múltiplo de 1,260 y 2,940.

Para responder a esta pregunta, volvemos a descomponer a cada uno de los dos números como un producto de números primos. Cada múltiplo común de los números en cuestión es múltiplo de los factores primos comunes a ambos números. El producto de todos los factores primos comunes junto con los factores primos que no son comunes y que aparecen en ambos será el mínimo común múltiplo buscado. Veamos cómo:

Como antes, tenemos que

$$
\begin{aligned}
1{,}260 &= \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\mathbf{3}\times 3\times\mathbf{5}\times\mathbf{7}\\
2{,}940 &= \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\mathbf{3}\times\ \ \ \mathbf{5}\times\mathbf{7}\times 7\\
\hline
&\mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\mathbf{3}\times 3\times\mathbf{5}\times\mathbf{7}\times 7 = 8{,}820
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1{,}260 &= 2^2\times 3^2\times 5^1\times 7\\
2{,}940 &= 2^2\times 3^1\times 5^1\times 7^2\\
\hline
&2^2\times 3^2\times 5^1\times 7^2 = 8{,}820
\end{aligned}
$$

El mínimo común múltiplo se define por los factores primos que son comunes a todas las descomposiciones y los factores primos que sobran.

En forma de potencias, se toman los factores primos con el exponente más grande que aparezca en las descomposiciones de cada número.

Así: **mcm (1260 , 2940) = 8,820**

Podemos concluir que, para calcular el **mínimo común múltiplo** de una colección de números naturales, hay que descomponerlos como productos de números primos. Entonces, el mcm es el producto de las potencias de los primos que aparecen en todas las descomposiciones tomados con el mayor de todos los exponentes. Es decir, deben tomarse factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Problema 4

Calcular el mínimo común múltiplo de 18,900, 32,760 y 11,700.

$$
\begin{aligned}
18{,}900 &= \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\ \ \ \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times 3\times\mathbf{5}\times 5\times 7\\
32{,}760 &= \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times 2\times\mathbf{3}\times\mathbf{3}\times\ \ \ \mathbf{5}\times\ \ \ 7\times 13\\
11{,}700 &= \mathbf{2}\times\mathbf{2}\times\ \ \ \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times\ \ \ \mathbf{5}\times 5\times\ \ \ 13\\
\hline
&\mathbf{2}\times\mathbf{2}\times 2\times\mathbf{3}\times\mathbf{3}\times 3\times 5\times\mathbf{5}\times 7\times 13 = 491{,}400
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
18{,}900 &= 2^2\times 3^3\times 5^2\times 7^1\\
32{,}760 &= 2^3\times 3^2\times 5^1\times 7^1\times 13^1\\
11{,}700 &= 2^2\times 3^2\times 5^2\times 13^1\\
\hline
&2^3\times 3^3\times 5^2\times 7^1\times 13^1 = 491{,}400
\end{aligned}
$$

Como vimos, el cálculo del máximo común divisor puede ser bastante pesado. Afortunadamente, el gran sabio Euclides tuvo una mejor idea de cómo calcularlo:

Tomemos, por ejemplo, 350 y 140. Si un número divide a ambos, entonces también divide a su diferencia. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{MCD}(350\,,\,140) &= \text{MCD}(350-140,\,140) \\ &= \text{MCD}(210\,,\,140) \end{aligned}$$

Si dos números son divisibles entre otro, también lo es su diferencia.

Aplicando la regla, si un número divide a 210 y a 140, también divide a la diferencia, por lo que

$$\begin{aligned} \text{MCD}(210\,,\,140) &= \text{MCD}(210-140,\,140) \\ &= \text{MCD}(70\,,\,140) = 70 \end{aligned}$$

En resumen podemos decir que cada número que divide a 350 y a 140 divide también a $350 - 2\times140 = 350 - 280$; por tanto

$$\begin{aligned} \text{MCD}(350\,,\,140) &= \text{MCD}(350-2\times140\,,\,140) \\ &= \text{MCD}(70\,,\,140) = 70. \end{aligned}$$

Veamos cómo sistematizar el método: Calculemos el MCD de 4,692 y 648

Dividimos el más grande entre el más chico y calculamos el residuo

		Por lo tanto
Algoritmo de Euclides	4,692 = **648**×7 + **156**	MCD (4,692 , 648) = MCD(648 , 156)
	648 = **156**×4 + **24**	MCD (648 , 156) = MCD(156 , 24)
	156 = **24**×6 + **12**	MCD (156 , 24) = MCD(24 , 12)
	24 = **12**×2	MCD (24 , 12) = **12**

Así pues, vemos que la idea del método es ir dividiendo hasta que no quede ningún residuo. El último residuo que quedó (en nuestro caso 12) es el máximo común divisor deseado.

A este método se le llama el **algoritmo de Euclides.**

Euclides fue un matemático griego que vivió alrededor del año 320 antes de nuestra era.	**Algoritmo** es una expresión matemática que viene del árabe y significa "modo de calcular".

Ejercicios variados 1.7

1. Utiliza la descomposición como producto de números primos y determina el MCD y el mcm de las parejas de números naturales:

(a) 63 y 105	(b) 78 y 104	(c) 104 y 65	(d) 252 y 306
(e) 544 y 368	(f) 1,295 y 322	(g) 288 y 738	(h) 924 y 660
(i) 4,576 y 3,388	(j) 15,400 y 21,560	(k) 10,237 y 4,998	

2. Utiliza la descomposición como producto de números primos y determina el MCD y el mcm de las colecciones de números naturales:

(a) 16, 24 y 28	(b) 24, 54 y 74	(c) 32,49 y 125
(d) 154, 198 y 242	(e) 8, 64 y 256	(f) 204, 425 y 119
(g) 36, 44, 60, 84	(h) 35, 63, 31 y 105	(i) 3, 4, 5, 6 y 7

3. Utiliza el MCD de cada pareja de números y calcula todos los divisores comunes, así como el mcm y los siguientes tres múltiplos comunes más grandes:

(a) 288 y 240	(b) 245 y 210	(c) 319 y 435
(d) 432 y 234	(e) 324 y 648	(f) 1,368 y 1,218
(g) 233 y 1,626	(h) 4,071 y 2,714	(i) 8,000 y 13,333

1.8 Resumen general y ejercicios

LO IMPORTANTE	EJEMPLOS
Los números naturales	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots$
Las operaciones	$15 + 18$, $23 - 15$, 14×5
La ley conmutativa de la suma	$13 + 17 = 17 + 13$
La ley conmutativa del producto	$23 \times 13 = 13 \times 23$
La ley asociativa de la suma	$(15 + 4) + 8 = 15 + (4 + 8)$
La ley asociativa del producto	$(31 \times 18) \times 5 = 31 \times (18 \times 5)$
La ley distributiva del producto sobre la suma (y la diferencia)	$45 \times (23 + 8) = 45 \times 23 + 45 \times 8$ $(24 - 19) \times 34 = 24 \times 34 - 19 \times 24$

LO IMPORTANTE	EJEMPLOS
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD	
La suma de las cifras de un número se llama suma transversal	3,825 **tiene suma transversal** $3 + 8 + 2 + 5 = 18$
$2 \mid a$: si a es par, es decir, si su última cifra es 0, 2, 4, 6, 8.	$2 \mid 556$; $2 \nmid 3{,}423$
$3 \mid a$: si la suma transversal de a es divisible entre 3.	$3 \mid 31{,}452$, $3 \nmid 23{,}453$
$4 \mid a$: si el número formado por las dos últimas cifras de a es divisible entre 4.	$4 \mid 53{,}384$; $4 \nmid 23{,}822$
$5 \mid a$: si la última cifra de a es 0 o 5.	$5 \mid 73{,}255$; $5 \nmid 4{,}204$
$6 \mid a$: si tanto 2, como 3 dividen al número a.	$6 \mid 744$; $6 \nmid 224$
$8 \mid a$: si el número formado por las tres últimas cifras de a es divisible entre 8.	$8 \mid 71{,}320$; $8 \nmid 24{,}804$
$9 \mid a$: si la suma transversal de a es divisible entre 9.	$9 \mid 35{,}721$; $9 \nmid 23{,}453$
$10 \mid a$: si la última cifra de a es 0.	$10 \mid 34{,}780$; $10 \nmid 47$
Los números a que tienen exactamente dos divisores (1 y a) son los primos	2, 3, 5, 7, 11 son números primos 1, 4, 6, 8, 9, 10 no son números primos
Todo número natural mayor que 1 es primo o se descompone en forma única como producto de primos.	$3{,}780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 =$ $= 2^2 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^1$
Se puede encontrar el **máximo común divisor** de varios números tomando los **exponentes más pequeños** en la descomposición en potencias de primos que son comunes a cada número. Se puede encontrar el **mínimo común múltiplo** de varios números tomando los **exponentes más grandes** en la descomposición en potencias de primos de cada uno.	$26{,}460 = 2^2 x 3^3 x 5^1 x 7^2$ $12{,}600 = 2^3 x 3^2 x 5^2 x 7^1$ $12{,}740 = 2^2 x 5^1 x 7^2 x 13^1$ MCD: $2^2 x 5^1 x 7^1 = 140$ mcm: $2^3 x 3^3 x 5^2 x 7^2 x 13^1 = 3'439{,}800$

Problemas 1.8

13	8		1
2			
3	10		15
16	5		4

1. Completa el cuadrado de la derecha de manera que se convierta en un **cuadrado mágico** (recuerda que un cuadrado es mágico si la suma de los números en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal da siempre el mismo resultado) [Observa que en la solución deben aparecer, sin repetición, los números del 1 al $4^2=16$]

2. Eduardo compró tres libros de 34,000, 43,000 y 62,000 pesos, respectivamente, una calculadora de mano de 75,000 y cinco cuadernos de 11,000 pesos cada uno. Pagó con 6 billetes de 50,000 pesos. ¿Cuánto dinero le devolvieron?

3. La mamá de Ximena hizo una compra en la panadería. Llevó varios bizcochos de 300 pesos y varios pandequesos de 400 pesos, pagó con un billete de 5,000 y le devolvieron 700 pesos. Si llevó más pandequesos que bizcochos ¿cuántos bizcochos y cuántos pandequesos se llevó?

4. ¿De cuántas formas distintas puedes completar 1,000 pesos usando monedas? (Recuerda que hay monedas de 50, 100, 200 y 500 pesos. ¿Se puede completar mil pesos con monedas, tales que todas sean de distinta denominación?

5. Doce personas fueron al cine. Los adultos pagaron 3,000 pesos cada uno y los niños 1,500. Si en total pagaron 25,500 pesos, ¿cuántos adultos y cuántos niños entraron al cine?

6. Un tren de pasajeros lleva 15 vagones; en cada vagón hay 7 compartimentos y cada compartimento tiene 6 asientos. ¿Cuántos pasajeros pueden viajar (sentados) en ese tren?

7. Con la ayuda de tu calculadora de mano, calcula cuántos segundos hay en un día, en una semana, en un mes de 30 días y en un año de 365 días. ¿Y si el año es bisiesto?

8. La carta de comidas de un restaurante consta de 2 sopas, 5 guisados y 3 postres. ¿De cuántas maneras diferentes puede componerse un menú completo (una sopa, un guisado y un postre)? Si se desease aumentar el número posible de menús agregando un solo plato, ¿qué hay que agregar: una sopa, un guisado o un postre?

9. Si deseamos cercar un terreno rectangular de 15 por 20 metros con una cerca de 2 metros de altura y el metro cuadrado de cerca cuesta 12,000 pesos, ¿Cuánto costará la cerca alrededor de todo el terreno?

10. Recuerda que un **número primo** es aquel que tiene exactamente dos divisores: él mismo y 1. Elabora una lista de todos los números primos entre 1 y 100.

11. Indica todos los números de dos cifras que tengan suma transversal igual a 5 (o a 8, a 13, a 17).

12. Indica todos los números de tres cifras que tengan suma transversal igual a 3.

13. Una línea eléctrica de alta tensión se coloca sobre torres que distan 115m una de la otra. Se quiere tender una línea de 46km. Si la primera torre se coloca al principio de la línea, ¿cuántas torres serán necesarias?

14. Copia en tu cuaderno cuadriculado la siguiente tabla y complétala:

	3402	315	705	8428	1356	54323	975310	110010	201501
2	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$					
3	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\nmid$					
4									
5									
9									

Esta es la ley de TRANSITIVIDAD de la divisibilidad

Como $16|192$, ya que $192 = 160 + 32 = 16\times10 + 16\times2 = 16\times12$, y dado que $8|16$, puesto que $16 = 8\times2$, tenemos que, $192 = 16\times12 = (8\times2)\times12 = 8\times(2\times12) = 8\times24$ (aquí aplicamos la ley asociativa de la multiplicación ¿verdad?). Así, el hecho de que $8|16$ y $16|192$ implica que $8|192$.

Para saber más...

En símbolos algebraicos:

si a, b, c son números naturales,
se cumple que:
Si a divide a b y b divide a c, entonces
a divide a c; es decir,

$$a|b\ ,\ b|c \longrightarrow a|c$$

15. (a) Enrique ya se dio cuenta de que 24 divide a 576, ¿qué otros divisores de 576 puede encontrar **sin escribir?**

(b) El profesor Saucedo compró boletos de 6,000 pesos para un recital de piano para todos sus alumnos. Cuando el señor de la taquilla le cobró 172,000 pesos, el profesor inmediatamente se disgustó: "¡Eso no puede ser!", exclamó. ¿Cómo se dio cuenta tan pronto?

(c) Sebastián insiste: "Todo número divisible entre 48 también lo es entre 6, 12 y 16". Luego dice: "Todo número que es divisible entre 99 lo es también entre 3, 11 y 19". ¿En qué casos tiene Sebastián razón y en cuáles no?

16. Haciendo uso de la descomposición de un número en factores, encuentra el mayor número de divisores. Veamos por ejemplo: $144 = 16 \times 9$. Ya que los divisores de 16 son 1, 2, 4, 8 y 16 y los de 9 son 1, 3 y 9, entonces todos éstos y sus productos, son divisores de 144, a saber: $2\times 3 = 6$, $4\times 3 = 12$, $8\times 3 = 24$, $16\times 3 = 48$, $2\times 9 = 18$, $4\times 9 = 36$, $8\times 9 = 72$ y, por supuesto, $16\times 9 = 144$.

(a) $112 = 7\times 16$ (b) $234 = 18\times 13$ (c) $156 = 6\times 26$

(d) $224 = 14\times 16$ (e) $2{,}079 = 21\times 99$ (f) $768 = 24\times 32$

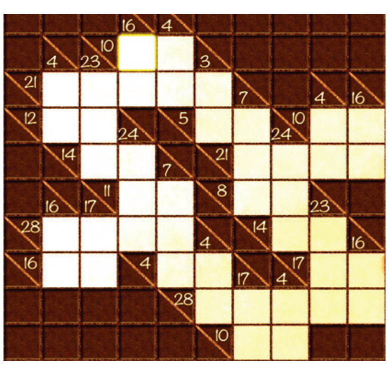
(g) $2{,}688 = 12\times 14\times 16$

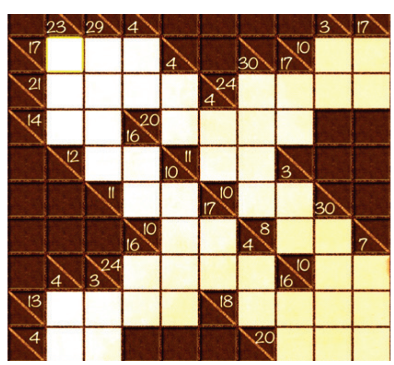
Para comenzar a pensar

17. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente de 353,000 km y la de la Tierra al Sol es de 150'000,000 km; por otro lado, el diámetro del Sol es de 1'392,000 km. Un eclipse de Sol es tan espectacular porque la Luna y el Sol tienen el mismo diámetro aparente. ¿Cuál es el diámetro aproximado de la Luna en km?

18. De los datos del problema anterior, calcula cuántas veces mayor es la distancia de la tierra al sol que la de la tierra a la luna. Si sabemos que el radio de la tierra es de 6,379 km, ¿cuántas veces mayor es el diámetro del sol que el de la tierra? ¿Vistos desde la luna cuántas veces más grande se vería la tierra que el sol?

19. El kakuro es como un crucigrama, pero con números. Se trata de escoger cifras del 1 al 9 en una cuadrícula de celdas, que sin repetición sumen el resultado indicado, arriba de la diagonal, para las celdas horizontales y debajo de ésta, para las verticales. (Extraídos del juego para iPhone de iTunes)





1.9 Notas históricas

Las primeras nociones de **número** y de **forma** datan de las lejanas épocas de la edad de piedra. Hace unos 15,000 años se hicieron las famosas pinturas rupestres de Francia y España, en donde el hombre comienza a representar formas en figuras animales y escenas de caza.

La fuente original de alimentación de los hombres de las cavernas era, además de la caza, la recolección de frutas y raíces; ésta se efectuaba más de acuerdo con sus necesidades inmediatas que con un afán de aprovisionamiento. Conforme fue dándose la evolución del hombre primitivo, éste empieza a descubrir la producción como una fuente más conveniente de provisión de alimentos. Este cambio fundamental marca la transición de la llamada antigua edad de piedra, o paleolítico, a la nueva edad de piedra, o neolítico. La característica que lo marca es una actitud del hombre más activa frente a la naturaleza, en el sentido de no sólo recoger pasivamente lo que la naturaleza produce, sino él mismo hacer que la tierra produzca lo que él requiere. Esto ocurrió hace unos 10,000 años. Por supuesto, esto también modificó el carácter nómada de las tribus y propició asentamientos humanos sedentarios.

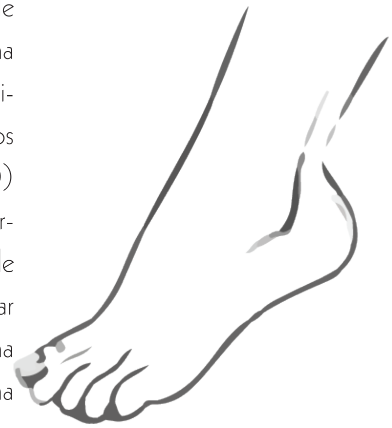
En esos principios de la cultura humana surgen las primeras nociones de número, las que, a pesar de ser ahora parte fundamental y casi natural de su cultura, en esa época difícilmente hacían parte de su forma de pensar, puesto que significaban un profundo proceso de abstracción, capacidad que entonces apenas se comenzaba a gestar en el hombre. Al principio, no se contaba con la precisión que se tiene hoy día; se presume que las primeras formas de contar distinguían solamente entre **uno**, **dos** y **muchos**. Es decir, **muchos** ya significaba **tres** o más. Cuando se fue extendiendo la noción de número, los siguientes **números naturales** se fueron creando por adición: el **tres** como la suma de **dos** y **uno**; el **cuatro** como la suma de **dos** y **dos**; el cinco como la suma de **dos** y **tres**.

Es interesante conocer cómo algunas tribus australianas designan los números. Por ejemplo, los Kamilaroy los designan así:

1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan bulan,

5 = bulan guliba, 6 = guliba guliba.

A medida que fueron desarrollándose la producción y el comercio se fue desarrollando también el concepto de número. Se empezó a agrupar los números en unidades más grandes, usando, por ejemplo, los dedos de las manos. De ahí se llegó a los sistemas de numeración primero con 5 como base y luego con 10 como base. Los otros números se formaban sumando o restando, así **doce** se formaba como **10 + 2** o **nueve** se formaba como **10 – 1.** Algunas veces era 20 la base numérica que se utilizaba, usando dedos, tanto de las manos como de los pies. En la América precolombina había cuando menos 307 sistemas numéricos, de los cuales 146 eran decimales, mientras que 106 eran quinarios (es decir, con base 5) y quinarios decimales (combinación de base 5 y base 10), vigesimales (con base 20) y quinarios vigesimales (combinación de base 5 y base 20). Ésta es la forma que utilizaban los mayas, pero también la de los celtas en el centro de Europa. La numeración maya utilizaba una barrita horizontal para representar el 5 y según la posición en la que se colocaran sus signos se referían a alguna potencia de 20, como veremos en la próxima unidad. En el actual idioma francés también se aprecia esta base veinte, cuando observamos que 80 se dice *quatre vingt* (cuatro × veinte) o que 90 se dice *quatre vingt dix* (cuatro × veinte + diez).



Los tipos más primitivos de aritmética formaban sus números, como ya dijimos, sumando; así, **catorce** era 10 + 4 o 15 – 1. La multiplicación comenzó cuando 20 ya no se escribía como 10 + 10 sino como 2 × 10. Estas operaciones **diádicas** se usaron por milenios como un camino entre la adición y la multiplicación, particularmente en Egipto y en la India.

La división comenzó cuando 10 fue expresado como "la mitad de un cuerpo", ya que el cuerpo tenía 20 dedos. La formación consciente de las fracciones como tales era muy rara.

Ya hacia el tercer siglo de nuestra era surgió en Alejandría el matemático Diofanto, quien hizo un tratado sistemático de los números naturales. Se ocupó de buscar soluciones a problemas aritméticos cuyas soluciones fueran números naturales. Él fue quien nos condujo a la aritmética moderna.